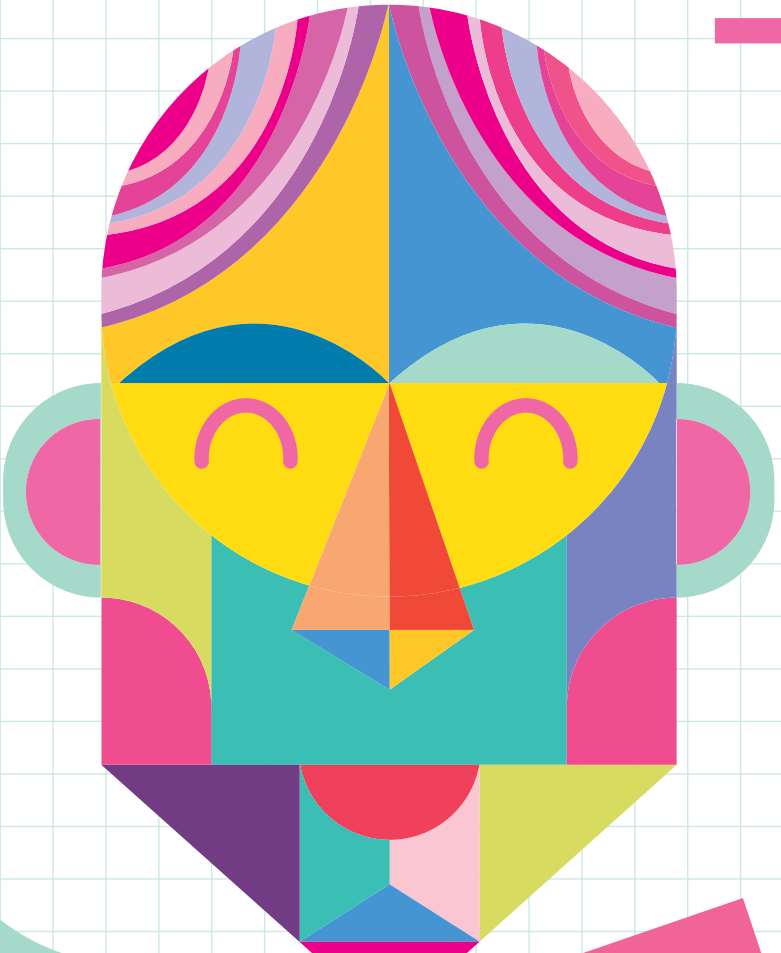


محمود نصیری

تفکر هندسی و مفهوم‌های هندسی

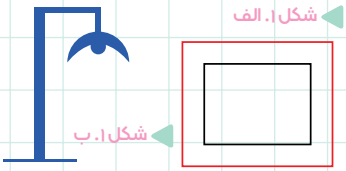
مقدمه

در این سلسله مقاله‌ها سعی در اشاعهٔ مفهوم‌ها و تفکر هندسی داریم و می‌کوشیم دانش‌آموزان و مخاطبان مجله را با ساختار هندسه و مفهوم‌های اولیهٔ آن آشنا کنیم. این مجموعه مخصوص دانش‌آموزی است که در دوران ابتدایی تا حدودی با مفهوم‌های هندسه به‌طور شهودی و غیرمستقیم آشنا شده است. در این مقاله‌ها بررسی و بیان مفهوم‌های هندسی دقیق‌تر از آن است که دانش‌آموزان در دورهٔ ابتدایی با آن‌ها آشنا می‌شوند. در دورهٔ اول متوسطه دانش‌آموزان باید بتوانند رابطه‌های موجود بین شکل‌های هندسی را تشخیص دهند و آن‌ها را براساس ویژگی‌ها دسته‌بندی کنند. مثلاً در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دوبه‌دو موازی‌اند و در نتیجه، زاویه‌های مقابل هم‌اندازه هستند. در این سطح اثبات‌های غیررسمی را دنبال می‌کنیم و دانش‌آموزان را با اثبات‌هایی با گام‌های محدود آشنا می‌سازیم. می‌کوشیم از استدلال‌های غیررسمی گام‌به‌گام وارد درک استنتاج شویم و آن‌ها را با استدلال‌های رسمی‌تر آشنا کنیم. به همین دلیل آموزش هندسه در سال‌های هفتم، هشتم و نهم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این سال‌ها با مرور مفهوم‌هایی که در دورهٔ ابتدایی با آن‌ها آشنا شده‌اند و استفاده از نمادها و حرف‌های لاتین، برای مفهوم‌هایی مانند پاره‌خط، زاویه و اندازه‌های آن‌ها و همچنین مثلث و کلاً چندضلعی‌ها، سعی می‌شود دانش‌آموزان با تعریف‌های بیشتر و دقیق‌تری آشنا شوند. از جمله اساسی‌ترین مفهوم‌هایی که در این دوره شما دانش‌آموزان با آن‌ها آشنا می‌شوید، می‌توان به هم‌نهشتی، تقارن و تبدیل‌های هندسی مانند بازتاب (برگرداندن)، انتقال (لغزاندن)، دوران (چرخاندن) و تشابه اشاره کرد. همچنین یکی دیگر از سرفصل‌های مهم، تفکر و تجسم فضایی و بررسی شکل‌های سه‌بعدی است که در این دوره همراه با محاسبهٔ مساحت و حجم مطالعه می‌شوند. دو مفهوم مهم هندسه «پاره‌خط» و «زاویه» را در بخش‌های قبلی بررسی کردیم. در این بخش یک قدم جلوتر می‌رویم و مفهوم‌هایی را بیان می‌کنیم که به بخش‌های قبلی به‌ویژه زاویه وابسته‌اند.

خط‌های عمود بر هم ـ خط‌های موازی

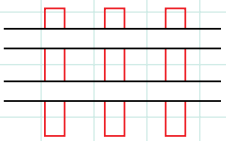
در دنیای واقعی می‌توانیم تصویرهایی از خط‌های عمود بر هم و موازی داشته باشیم (شکل ۱. الف، ب و ج).

شکل ۱. الف



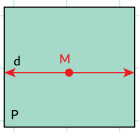
شکل ۱. ب

شکل ۱. ج

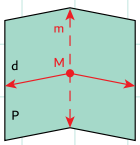


فعالیت: خط d را در یک صفحهٔ کاغذ P و نقطهٔ M را روی خط d در نظر می‌گیریم (شکل‌های ۲ تا ۴).

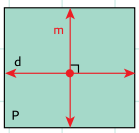
شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴



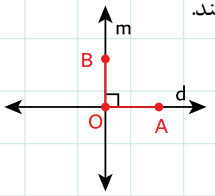
اکنون صفحهٔ کاغذ را از نقطهٔ M تا کنید به طوری که قسمت‌های راست و چپ خط d بر روی هم واقع شوند. یعنی نیم‌خط‌های راست و چپ با ابتدای M روی هم قرار گیرند و خطِ تا، واضح باشد.

سپس صفحه را به حالت قبل برگردانید و خطِ تا را با یک مداد پررنگ کنید و آن را m بنامید. اکنون زاویهٔ بین دو خط را با یک نقاله اندازه بگیرید. مشاهده می‌کنید که اندازهٔ هریک از زاویه‌های روی دو خط برابر ۹۰° است. با یک گونیا نیز می‌توانید آن را تحقیق کنید.

در فعالیت قبل به‌طور شهودی و به وسیلهٔ کاغذ و تا، رسم خطی عمود بر یک خط را از نقطه‌ای روی آن نشان دادیم. ابتدا خط‌های عمود را تعریف می‌کنیم:

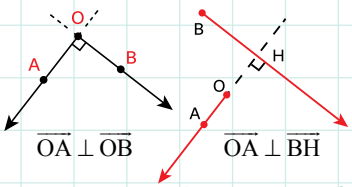
دو خط d و m را بر هم عمود گوییم، هرگاه هر دو شامل یک زاویهٔ قائمه باشند. نماد ⊥ به معنی عمود بودن است.

در شکل ۵، دو خط d و m بر هم عمودند (m ⊥ d) زیرا هر دو شامل زاویهٔ AOB هستند که قائمه است. بنابر قضیهٔ زاویه‌های متقابل به رأس و مکمل سه زاویهٔ دیگر نیز قائمه‌هستند.

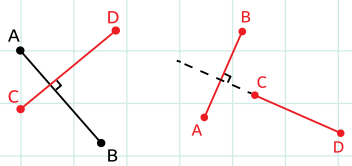


شکل ۵

به همین ترتیب می‌توان عمود بودن دو نیم‌خط، دو پاره‌خط، یک پاره‌خط و یک نیم‌خط و غیره را تعریف کرد. کافی است خط‌های شامل آن دو بر هم عمود باشند. مثلاً می‌گوییم دو ضلع یک مثلث بر هم عمودند، به این معنی است که خط‌های شامل آن‌ها بر هم عمودند (شکل‌های ۶ و ۷).



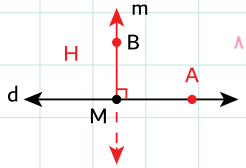
شکل ۶ دو نیم‌خط عمود بر هم



شکل ۷ پاره‌خط‌های عمود بر هم

وجود و یکتایی عمود

فرض کنید نقطهٔ M روی خط d واقع باشد (شکل ۸) بنا بر اصل ساختن زاویه، در یک نیم‌صفحه خط d مثلاً H، دقیقاً یک نیم‌خط $\overrightarrow{MB}$ وجود دارد که: $m\angle AMB = 90^\circ$. در نتیجه خط $m = \overrightarrow{MB}$ تنها خطی در یک صفحه شامل d است که در M بر d عمود است.



شکل ۸

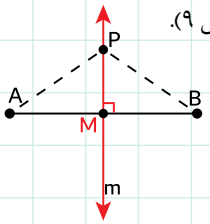
در واقع قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه: از هر نقطه روی یک خط، فقط یک خط در صفحه شامل این خط وجود دارد که بر آن عمود است.

در اینجا وجود و یکتایی عمود نشان داده شده است. به کمک گونیا یا نقاله به‌طور شهودی می‌توانید این خط را رسم کنید. اما چگونگی ترسیم و اثبات عمود بودن آن به مقدمه‌های بیشتری نیاز دارد که بعداً شرح می‌دهیم. اکنون می‌توانیم عمودمنصف یک پاره‌خط را تعریف کنیم. اگر پاره‌خطی، خطی، نیم‌خطی یا صفحه‌ای از وسط یک پاره‌خط بگذرد، آن‌ها را منصف پاره‌خط می‌نامیم. اگر عمود نیز بشوند، آن‌ها را عمودمنصف می‌نامیم.

خط عمودمنصف هر پاره‌خط، خطی در صفحهٔ آن است که در وسط آن پاره‌خط بر آن عمود می‌شود.

خط m در نقطهٔ وسط $\overline{AB}$ بر آن عمود شده است. پس خط m عمودمنصف $\overline{AB}$ است (شکل ۹).



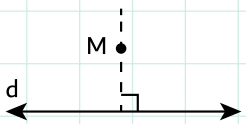
شکل ۹

نقطهٔ P روی خط عمودمنصف $\overline{AB}$ را به نقطه‌های A و B دو سر پاره‌خط وصل کنید. صفحهٔ کاغذ را از خط m تا کنید. چون: MA=MB ، B و A روی هم واقع می‌شوند. در این صورت $\overline{PB}$ روی $\overline{PA}$ واقع می‌شود. یعنی $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ یا P از دو سر پاره‌خط به فاصله‌های برابر است: PA=PB. این یک ویژگی مهم عمودمنصف است که به زودی در بخش‌های بعدی آن را ثابت می‌کنیم.

اکنون مسئلهٔ مهم‌تری را در مورد عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر خط بررسی می‌کنیم.

«چگونه با استفاده از کاغذ و تا می‌توانید از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، عمودی بر آن رسم کنید؟»

دقیقاً مانند حالتی که M روی خط d واقع است عمل کنید. بعداً نشان خواهیم داد که این خط نیز یکتاست (شکل ۱۰).

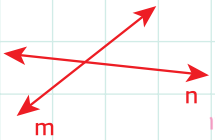


شکل ۱۰

خط‌های موازی

اگر از شما بپرسند که در صفحه دو خط نسبت به هم چه موقعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند، با توجه به معلومات قبلی خود سه حالت زیر را نشان خواهید داد:

۱. اگر دو خط یک نقطهٔ مشترک دارند، آن‌ها را «متقاطع» می‌نامند (شکل ۱۱).

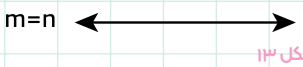


شکل ۱۱

۲. اگر دو خط هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، در این صورت دو خط را موازی می‌گوییم. علامت || نماد موازی بودن دو خط است (شکل ۱۲).

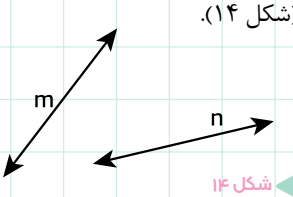
شکل ۱۲

۳. دو خط بر هم منطبق‌اند. در این حالت می‌گوییم m همان n است (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

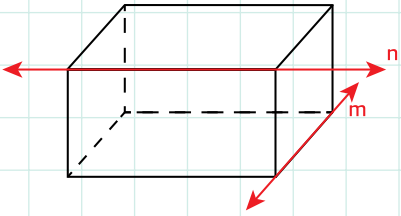
البته در فضا حالت دیگری از خط‌ها وجود دارند که دو خط در یک صفحه نیستند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. در این حالت دو خط متنافر نامیده می‌شوند (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

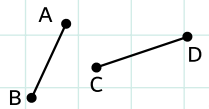
در یک اتاق می‌توانید چنین خط‌هایی را مشاهده کنید.

شکل ۱۵ یک مکعب‌مستطیل است؛ مانند یک جعبه. در این شکل خط‌های موازی، متقاطع و متنافر را پیدا کنید.



شکل ۱۵

هرچند مفهوم موازی در مورد خط‌ها مطرح می‌شود، اما گاهی با مسئله‌ها یا تعریف‌هایی در هندسه روبه‌رو می‌شویم که باید مفهومی را با توجه به یک مفهوم دیگر تعریف کنیم. مثلاً در سال‌های قبل با متوازی‌الاضلاع آشنا شده‌اید، در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو دوبه‌دو موازی‌اند. یعنی در اینجا با دو پاره‌خط روبه‌رو هستیم که از موازی بودن آن‌ها صحبت می‌کنیم. موازی بودنِ دو پاره‌خط به چه معنی است؟ مثلاً در شکل ۱۶ دو پاره‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. آیا موازی‌اند؟



شکل ۱۶

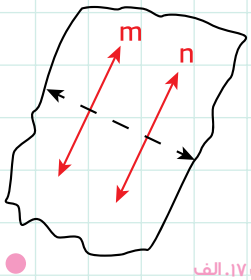
باید تعریفی برای موازی بودن دو پاره‌خط یا دو نیم‌خط و یا حتی یک پاره‌خط و یک نیم‌خط یا خط بیان کنیم که در تعریف‌ها با مشکل روبه‌رو نشویم. بنابراین تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

دو پاره‌خط، دو نیم‌خط، یک پاره‌خط و یک نیم‌خط، و ... را موازی می‌گوییم هرگاه خط‌های شامل آن‌ها موازی باشند.

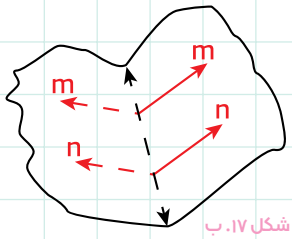
در شکل ۱۶ دو پاره‌خط رسم شده، با وجود اینکه هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، اما موازی نیستند. حتی متقاطع نیز نیستند. فقط باید بیان کنیم خط‌های شامل آن‌ها متقاطع‌اند.

چگونه به وسیلهٔ کاغذ و تا نشان دهیم دو خط موازی‌اند؟

صفحه را از یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خط‌ها تا می‌کنیم. به‌طوری‌که آن خط روی خودش واقع شود اگر خط دیگر نیز روی خودش واقع شد، می‌گوییم دو خط موازی‌اند (شکل ۱۷. الف، ب و ج).



شکل ۱۷. الف



شکل ۱۷. ب

شکل ۱۷. ج

تا این قسمت‌ها فقط دربارهٔ خط‌های موازی تعریفی را بیان کردیم، اما داستان موازی‌ها یکی از جالب‌ترین بحث‌ها در هندسه است. اقلیدس، اصلی را که به نام «اصل پنجم اقلیدس» معروف است، بیان کرد که صورت معادل آن چنین است:

از هر نقطه غیرواقع بر یک خط فقط یک خط به موازات آن وجود دارد.

اما این اصل به مدت بیش از ۱۸۰۰ سال مورد شک ریاضی‌دان‌ها بوده تا اینکه در حدود دویست سال قبل ریاضی‌دان‌ها این مشکل و سردرگمی را برای همیشه حل کردند و این موضوع به پیدایش هندسه‌هایی منجر شد که به هندسه‌های غیراقلیدسی معروف‌اند. در بخش بعدی به‌طور مشروح‌تر در این مورد صحبت خواهیم کرد.

پی‌نوشت

1. reflex